**Министарство просвете, науке и технолошког развоја**
**ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ**

**Окружно такмичење из математике**
**ученика основних школа**
**25.03.2018.**

## VIII разред

**1**. На табли је написано неколико позитивних реалних бројева од којих је сваки једнак једној деветини збира осталих бројева. Колико је бројева написано на табли?

**2**. Одреди све целе бројеве $n$ за које је број $\frac{2n+1}{3n-1}$ такође цео.

**3**. Правилна четворострана призма и правилна четворострана пирамида имају једнаке основе, површине и запремине. Ако је површина основе $100\text{cm}^2$, израчунај висине та два тела.

**4**. Права која садржи средиште $M$ крака $AD$ трапеза $ABCD$, дели трапез на два дела једнаких површина и сече други крак у тачки $N$. Израчунај однос $BN : NC$ у зависности од дужина основица $AB = a$, $CD = b$.

**5**. Да ли се за неки природан број $n$ збир првих $n$ природних бројева може завршавати са 2018?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

**VIII РАЗРЕД**

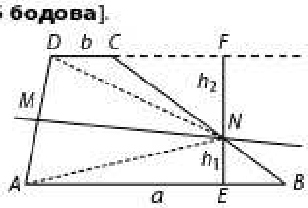
**Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.**
**Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.**

**1**. (**МЛ 52/4**) Означимо написане бројеве са $x_1, x_2, ..., x_k$ и са $S = x_1 + x_2 + ... + x_k$ њихов збир. Из услова задатка следи да је $S = x_1 + 9x_1 = 10x_1$ и слично $S = 10x_2, ..., S = 10x_k$ [**10 бодова**]. Дакле, сви написани бројеви су једнаки међу собом (и једнаки су десетини њиховог збира), што значи да их има 10 [**10 бодова**].

**2**. Како је $\left|\frac{2n+1}{3n-1}\right| < 1$, тј. $-1 < \frac{2n+1}{3n-1} < 1$ за $n \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ [**13 бодова**] и како је $\frac{2n+1}{3n-1} = 0$ за $n = -\frac{1}{2}$, то разломак може бити цео број само за $n \in \{0, 1, 2\}$ [**2 бода**]. Заменом ових вредности у разломку добијамо да су $n = 0$ и $n = 2$ једини цели бројеви за које је вредност разломка цео број [**5 бодова**].

**3**. Странице квадрата у основама су 10cm. Означимо висину призме са $H_1$, а висину пирамиде са $H_2$. Из једнакости основа и запремина следи да је $H_2 = 3H_1$ [**5 бодова**]. Из једнакости површина имамо да је $2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 \cdot H_1 = 100 + 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{H_2^2 + 25}$, односно $5 + 2H_1 = \sqrt{H_2^2 + 25}$ [**8 бодова**]. Заменом $H_2 = 3H_1$ и решавањем ове једначине добијамо да је $H_1 = 4$cm и $H_2 = 12$cm [**7 бодова**].

**4**. Троуглови $AMN$ и $DMN$ имају једнаке површине, јер је $MN$ тежишна дуж троугла $AND$. Како четвороуглови $ABNM$ и $CDMN$ имају једнаке површине, то и троуглови $ABN$ и $CDN$ имају једнаке површине [**7 бодова**]. Нека су $E$ и $F$ подножја нормала из $N$ на $AB$ и $CD$. Дужи $NE = h_1$ и $NF = h_2$ су висине троуглова $ABN$ и $CDN$, које одговарају страницама $AB = a$ и $CD = b$, па из једнакости површина следи $a \cdot \frac{h_1}{2} = b \cdot \frac{h_2}{2}$, одакле је $h_1 : h_2 = b : a$ [**7 бодова**]. Талесовом теоремом се добија да је тражени однос $BN : NC = NE : NF = h_1 : h_2 = b : a$ [**6 бодова**].




**5**. Ако се $\frac{n(n+1)}{2}$ завршава са 18, онда се $n(n + 1)$ завршава са 36. Последња цифра 6 производа $n(n + 1)$ може се добити само ако се n завршава са 2 или 7 [**8 бодова**].
Ако је $n = 10x + 2$, онда је $n(n + 1) = (10x + 2)(10x + 3) = 100x^2 + 50x + 6$, па се тај број завршава или са 06 или са 56 [**6 бодова**].
Ако је $n = 10x + 7$, онда је $n(n + 1) = (10x + 7)(10x + 8) = 100x^2 + 150x + 56$, па се тај број завршава или са 56 или са 06 [**6 бодова**].
Производ $n(n + 1)$ се не завршава са 36.